АГ - Иванов 23.10.12

$\vec{a}\vec{b}\vec{c}$

$a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3$

1) Скаларно $\vec{a}\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
2) векторно $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$
3) смесено $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\times\vec{c}$

$\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}$
$\vec{b} = b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2} + b_3\vec{e_3}$
$\vec{c} = c_1\vec{e_1} + c_2\vec{e_2} + c_3\vec{e_3}$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$
$\vec{a}\times\vec{b} = 0 \Leftrightarrow$ колинеарни
$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0 \Leftrightarrow$ компланарни

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}) \times (b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2} + b_3\vec{e_3}) =$$

$$\vec{e_1}\times\vec{e_2}(a_1b_1) + a_1b_3\vec{e_1}\times\vec{e_3} + a_2b_1\vec{e_2}\times\vec{e_1} + a_2b_3\vec{e_2}\times\vec{e_3} +$$

$$+ a_3b_1\vec{e_3}\times\vec{e_1} + a_3b_2\vec{e_3}\times\vec{e_2} =$$

Защото $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = 0$;

$$\vec{e_1}\times\vec{e_2}(a_1b_2 - a_2b_1) + e_2\times e_3(a_2b_3 - a_3b_2) + e_1\times e_3(a_1b_3 - a_3b_1)$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$$

$\vec{e_1}\times\vec{e_2} = |\vec{e_1}\vec{e_2}| = |\vec{e_1}||\vec{e_2}|\sin\measuredangle(e_1,e_2)$ - ортогонална $\Rightarrow$

$\vec{e_1}\times\vec{e_2} = \pm\vec{e_3}$ (зависи от ориентацията)

Нека $V = O\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$ - положително ориентирана

$\vec{e_1}\times\vec{e_2} = \vec{e_3}$
$\vec{e_2}\times\vec{e_3} = \vec{e_1}$
$\vec{e_1}\times\vec{e_3} = -\vec{e_3}\times\vec{e_1} = -\vec{e_2}$ (зарче завъртя посоката)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{e_3} + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{e_1} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{e_2}$$

координатите на $\vec{a} \times \vec{b}$ са $= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$

	$\vec{e_1}$	$\vec{e_2}$	$\vec{e_3}$
$\vec{a}$	a_1	a_2	a_3
$\vec{b}$	b_1	b_2	b_3

при e_1 остават a_2 и a_3 $(b_2\ b_3)$
при e_3 остават a_1 и a_2 $(b_1\ b_2)$
при e_2 е отрицателно

Задача

$A = 1, -1, 0$
$B = 0, 1, -1$
$C = 1, 1, 1$

Търси се $S_{\Delta ABC} = ?$

$\vec{AB} = B - A = (0,1,-1) - (1,-1,0) = (-1,2,-1)$
$\vec{AC} = C - A = (1,1,1) - (1,-1,0) = 0,2,1$

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} |(-1,2,-1) \times (0,2,1)| =$
$= \frac{1}{2} |(4,1,-2)| = \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + 1^2 + (-2)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{21}$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{21}$$

$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = (|\vec{a}||\vec{b}| \sin \sphericalangle(ab))^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2 \sphericalangle(ab) =$

$= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 (1 - \cos^2 \sphericalangle(ab) = \vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a}\vec{b})^2 = \vec{a} \times \vec{b}$

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} (|-1,2,-1| \times |0,2,1|) = \frac{1}{2} \sqrt{6 \cdot 6 - 3^2} = \frac{1}{2} \sqrt{21}$

3 вектора

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}\,\vec{c} =$$

$$\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{e_1} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{e_2} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) (c_1\vec{e_1} + c_2\vec{e_2} + c_3\vec{e_3}) =$$

$$\vec{c_1} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{c_2} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{c_3} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$ развитие по III-ти ред

$$(\vec{a}.\vec{b}\vec{c})(\vec{a'}\vec{b'}\vec{c'}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ b_1' & b_2' & b_3' \\ c_1' & c_2' & c_3' \end{vmatrix}$$ транспонирана матрица'

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1' & b_1' & c_1' \\ a_2' & b_2' & c_2' \\ a_3' & b_3' & c_3' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{a}\vec{a'} & \vec{a}\vec{b'} & \vec{a}\vec{c'} \\ \vec{b}\vec{a'} & \vec{b}\vec{b'} & \vec{b}\vec{c'} \\ \vec{c}\vec{a'} & \vec{c}\vec{b'} & \vec{c}\vec{c'} \end{vmatrix} \Rightarrow (\vec{a}\vec{b}\vec{c})^2$$ при $a=a', b=b', c=c' \Rightarrow$

Т $\begin{vmatrix} \vec{a}^2 & \vec{a}\vec{b} & \vec{a}\vec{c} \\ \vec{a}\vec{b} & \vec{b}^2 & \vec{b}\vec{c} \\ \vec{a}\vec{c} & \vec{b}\vec{c} & \vec{c}^2 \end{vmatrix}$ – Детерминанта на Грам
Винаги е положителна и е равна на 0
$\Leftrightarrow$ 3-те вектора са компланарни

$$(\vec{a}\times\vec{b})(\vec{c}\times\vec{d}) = ?$$

Нека $\vec{p} = \vec{a}\times\vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{c}\times\vec{d} \Rightarrow (\vec{p}\vec{q})^2 = (\vec{a}\vec{b}\vec{q})(\vec{p}\vec{c}\vec{d}) =$

$$\begin{vmatrix} \vec{a}\vec{p} & \vec{a}\vec{c} & \vec{a}\vec{d} \\ \vec{b}\vec{p} & \vec{b}\vec{c} & \vec{b}\vec{d} \\ \vec{q}\vec{p} & \vec{q}\vec{c} & \vec{q}\vec{d} \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \vec{a}\vec{p} = \vec{a}\vec{a}\times\vec{b} = \vec{a}\vec{a}\vec{b} = 0 \\ \vec{b}\vec{p} = \vec{b}\vec{a}\vec{b} = 0 \\ \vec{q}\vec{c} = \vec{c}\vec{c}\vec{d} = 0 \\ \vec{q}\vec{d} = \vec{d}\vec{c}\vec{d} = 0 \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \vec{ac} & \vec{ad} \\ 0 & \vec{bc} & \vec{bd} \\ \vec{pq} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{qp} \begin{vmatrix} \vec{ac} & \vec{ad} \\ \vec{bc} & \vec{bd} \end{vmatrix}$$

сл 1) $\vec{pq} \neq 0 \Rightarrow \vec{pq}^{\,k} = \vec{pq} \begin{vmatrix} \vec{ac} & \vec{ad} \\ \vec{bc} & \vec{bd} \end{vmatrix}$ или

$$\vec{pq} = \begin{vmatrix} \vec{ac} & \vec{ad} \\ \vec{bc} & \vec{bd} \end{vmatrix}$$

сл 2) $\vec{pq} = 0$ т.е. $\begin{vmatrix} \vec{ac} & \vec{ad} \\ \vec{bc} & \vec{bd} \end{vmatrix} = 0$

сл 2,1) $\vec{c}\vec{d}$ - колинеарни $\Rightarrow$ решението е ОК

сл 2,2) $\vec{c}\vec{d}$ - линейно независими (л.н.з.) $\Rightarrow$

$$0 = \vec{pq} = \vec{pcd} \Rightarrow \vec{p}, \vec{c}, \vec{d} \text{ - компланарни} \Rightarrow$$

$$\vec{p} = \lambda\vec{c} + \mu\vec{d} \Rightarrow \vec{q} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \text{ но}$$
$$\vec{p} = \vec{a} \times \vec{b} \text{ и } \vec{q} = \vec{c} \times \vec{d}$$

ако $\vec{p}$ умножим по $\vec{a}$ и после по $\vec{b}$ получаваме

$$\left.\begin{aligned} p &= \lambda\vec{ac} \times \mu\vec{ad} \\ p &= \lambda\vec{bc} \times \mu\vec{bd} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} \vec{ac} & \vec{ad} \\ \vec{bc} & \vec{ba} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \lambda = \mu = 0$$

система хомогенни линейни уравнения

Ако $\Delta \neq 0 \Rightarrow \lambda = \mu = 0 \Rightarrow \vec{p} = \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = \mu\vec{b} \Rightarrow \Delta = 0$

$$\boxed{(\vec{a} \times \vec{b})(\vec{c} \times \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{ac} & \vec{ad} \\ \vec{bc} & \vec{bd} \end{vmatrix}}$$

Двойно векторно произведение

представяне на разлика равнини
$$\begin{cases} \underbrace{(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}}_{\text{равнина}} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \\ \vec{a}\underbrace{(\vec{b}\times\vec{c})}_{\text{равнина}} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c} \end{cases}$$

Нека $\vec{v}$ е произволен вектор $\Rightarrow$

$$((\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c})\vec{v} = \lambda(\vec{a}\vec{v}) + \mu(\vec{b}\vec{v}) =$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})(\vec{c}\times\vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{a}\vec{c} & \vec{a}\vec{v} \\ \vec{b}\vec{c} & \vec{b}\vec{v} \end{vmatrix} = -(\vec{b}\vec{c})(\vec{a}\vec{v}) + (\vec{a}\vec{c})(\vec{b}\vec{v}) \Rightarrow$$

$$\lambda = -(\vec{b}\vec{c}) \quad \text{и} \quad \mu = (\vec{a}\vec{c}) \Rightarrow$$

$$\boxed{(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a}\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\vec{c})\vec{a}}$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = -(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a} = -[(\vec{a}\vec{b})\vec{c} - (\vec{a}\vec{c})\vec{b}] = (\vec{a}\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\vec{b})\vec{c}$$

$$\underbrace{(\vec{a}\times\vec{b})}_{q}\times\underbrace{(\vec{c}\times\vec{d})}_{p} = \underbrace{(\vec{a}\vec{p})\vec{b} - (\vec{b}\vec{p})\vec{a} = (\vec{q}\vec{d})\vec{c} - (\vec{q}\vec{c})\vec{d}}$$

$$\Downarrow$$

$$(\vec{a}\vec{c}\vec{d})\vec{b} - (\vec{b}\vec{c}\vec{d})\vec{a} = (\vec{a}\vec{b}\vec{d})\vec{c} - (\vec{a}\vec{b}\vec{c})\vec{d}$$

Нека $\vec{a}\vec{b}\vec{c} \neq 0 \Rightarrow \vec{d} = \frac{(\vec{b}\vec{c}\vec{d})}{(\vec{a}\vec{b}\vec{c})}\vec{a} - \frac{(\vec{a}\vec{c}\vec{d})}{(\vec{a}\vec{b}\vec{c})}\vec{b} + \frac{(\vec{a}\vec{b}\vec{d})}{(\vec{a}\vec{b}\vec{c})}\vec{c}$

$a: Ax + By + C = 0$

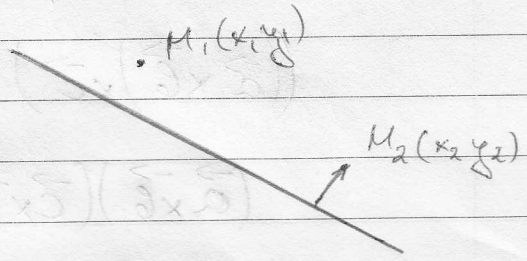
$\vec{a}(-B, A) \parallel a$

т.е. $\vec{a}$ е колинеарен на равнината

$\vec{n}_a(A,B) \perp a$

Пример: $\vec{p} = (1,2) \Rightarrow \vec{p} \perp$ при $1x + 2y + C = 0$

$a: Ax + By + C = 0$



тогава $a_{норм} = \dfrac{Ax + Bx + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$

$\delta(P(x_0, y_0), a) = \dfrac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

$\delta(M_1, a)\delta(M_2, a) > 0 \Leftrightarrow M_1, M_2$ от една и съща страна

$\delta(M_1, a)\delta(M_2, a) < 0 \Leftrightarrow M_1, M_2$ са от различни страни

$\delta(M_1, a)\delta(M_2, a) = 0 \Leftrightarrow M_1, M_2$ (M_1 или M_2) лежи на правата

Представянето на $\dfrac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$ става по този начин

$\cos x + \sin y - p = 0$

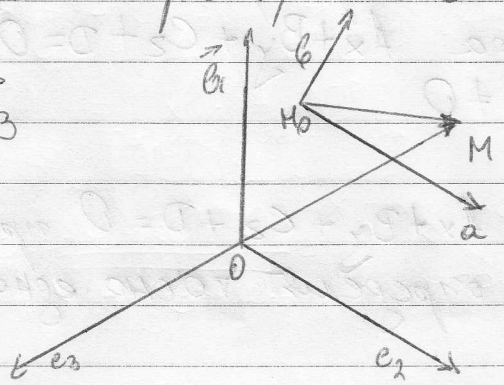
от норм.-произв. $\rightarrow$ $Ax + By + C = 0 \quad / \dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \Rightarrow$

$\dfrac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} x + \dfrac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} y + \dfrac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ представяне $a_{норм}$ чрез ъгъла

$\cos\alpha$ $\quad$ $\sin\alpha$

Уравнения на права и равнина в пространството

$K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$



$M_0(x_0 y_0 z_0)$
$\vec{a}(a_1 a_2 a_3)$
$\vec{b}(b_1 b_2 b_3)$

$$M \in \alpha\{M_0, \vec{a}, \vec{b}\} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$$

(векторно параметрично уравнение)

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda a_1 + \mu b_1 \\ y &= y_0 + \lambda a_2 + \mu b_2 \\ z &= z_0 + \lambda a_3 + \mu b_3 \end{aligned}\right\} \begin{matrix} \text{скаларно} \\ \text{параметрично} \\ \text{уравнение} \end{matrix}$$

Представяме го като система и премахваме λ и μ

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}(x - x_0) + \left(-\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\right)(y - y_0) + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}(z - z_0) = 0$$

транспони-
раме

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_3 \\ a_3 & b_2 \end{vmatrix}(x - x_0) + \left(-\begin{vmatrix} a_1 & b_3 \\ a_3 & b_1 \end{vmatrix}\right)(y - y_0) + \begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ a_2 & b_1 \end{vmatrix}(z - z_0) = 0$$

$$Ax + By + Cz + D = 0 \Rightarrow D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$$

при общо уравнение $\Rightarrow |A| + |B| + |C| \neq 0$ нали

$$(\vec{a} \times \vec{b}) = (A, B, C) \neq 0$$

16

Всяка равнина в пространството удовлетворява уравнението от вида $Ax+By+Cz+D=0$ при условие $|A|+|B|+|C|\neq 0$

Всяка система $Ax+By+Cz+D=0$ при условие $|A|+|B|+|C|\neq 0$ определят точно една равнина в пространството

Нека $x_0y_0z_0$ е решение на $Ax+By+Cz+D=0$ т.е. $B\neq 0$

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$$

определяме $\vec{a}'(-B,A,0)$ и $\vec{b}'(0,-C,B)$

и равнината $\{M_0(x_0y_0z_0),\vec{a},\vec{b}$

$$x=x_0+\lambda a_1'+\mu b_1'=x_0-B\lambda \quad /A$$
$$y=y_0+\lambda a_2'+\mu b_2'=y_0+A\lambda-C\mu \quad /B$$
$$z=z_0+\lambda a_3'+\mu b_3'=z_0+\mu B \quad /C$$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=\lambda(-AB+AB)+\mu(-BC+BC)=0$$

от $Ax+By+Cz+D=0$ заместване D и получаване

$$Ax+By+Cz+(-Ax_0-By_0-Cz_0)=0 \Rightarrow D=-Ax-By-Cz$$

Ако $\alpha: Ax+By+Cz+D=0$ и $\vec{n}_\alpha(A,B,C)\perp\alpha$

Даден $\vec{p}(\lambda,\mu,\nu)$ спрегнение

$\vec{p}$ компланарен с $\alpha \Leftrightarrow [\vec{p}\,\vec{n}_\alpha]=0 \Leftrightarrow$

$$A\lambda+B\mu+C\nu=0$$